文章编号：2095-2163(2022)03-0208-04　　中图分类号：TN312.8　　文献标志码：A

基于对称逐步超松弛的低复杂度信道估计算法

王　彬[1]，谢　杰[2]，陈　麟[1]

（1 中科芯集成电路有限公司，江苏 无锡 214072；2 中国电子科技集团公司第五十八研究所，江苏 无锡 214072）

摘　要：随着大规模多输入多输出系统基站端天线数量的增大，系统的信道容量和频谱效率随之增加。传统的信道估计算法，如最小均方误差涉及到高维矩阵的求逆运算，特别在大规模多输入多输出系统中，导致系统复杂度过高。为降低大规模多输入多输出系统的计算复杂度，本文提出了一种基于对称逐步超松弛的低复杂度信道估计算法，该方法以迭代的形式有效避免高维矩阵的直接求逆运算，降低系统复杂度。对所提算法进行了仿真实验对比分析，仿真结果表明，该算法可有效减少系统计算复杂度，且随着迭代次数的增加性能接近最小均方误差信道估计算法。

关键词：大规模多输入多输出；最小均方误差；信道估计；对称逐步超松弛

Low complexity channel estimation algorithm based on symmetric successive over relaxation

WANG Bin[1], XIE Jie[2], CHEN Lin[1]

(1 China Key System & Integrated Circuit CO .LTD, Wuxi 214072, China;
2 China Electronics Technology Group Corporation No.58 Research Institute, Wuxi 214072, China)

【**Abstract**】With the boost of the quantity of antennas at the base station in massive multiple-input multiple-output (MIMO) systems, the channel capacity and spectral efficiency are also increased. Conventional channel estimation algorithm such as the minimum mean square error (MMSE) involves the matrix inversion in large size with enormous computational complexity, especially in massive MIMO systems due to large antenna arrays. Therefore, in order to degrade the complexity caused by the inversion of the matrix, a low-complexity channel estimation algorithm is proposed based on the symmetric successive over relaxation (SSOR) algorithm, which can effectively avoid computing the inversion of the matrix by using the processing of iteration. Finally, simulation results demonstrate that the proposed scheme can obtain closing performance to the classical MMSE estimation algorithm with increased number of iteration.

【**Key words**】massive multiple-input multiple-output; minimum mean square error; channel estimation; symmetric successive over relaxation

0　引　言

随着无线设备接入量和数据需求的急剧增长，为每一个用户终端提供足够的频谱资源和容量无疑成为对基站通信技术的巨大挑战。如今，在大规模多输入多输出(Multiple-Input Multiple-Output, MIMO)系统中，基站端的天线数量远大于所服务的用户数量，实现了同一时间和频率资源下，拥有更高的频谱效率，可同时服务于数十个移动用户[1]。因此，大规模 MIMO 技术被视为未来无线通信系统的关键技术之一。

信道估计是大规模 MIMO 系统的重要部分，精确的信道状态信息对于基站而言尤为关键。传统的最小均方误差(Minimum Mean Square Error, MMSE)信道估计算法可以实现较优的性能，但其涉及到高维矩阵的求逆运算，增加了系统实现的复杂度。近些年来，越来越多的研究开始关注信道估计技术[2]，如：文献[3]提出了一种低复杂度级数展开算法来避免矩阵求逆，降低了系统计算复杂度，但计算涉及复杂的参数优化问题，使得复杂度又逐渐升高；文献[4]提出了一种迭代信道估计算法，减少导频污染的影响；文献[5]提出了一种基于压缩感知辅助的信道估计算法，可最大化利用信道的空间共稀疏性。随着近几年深度学习技术的逐渐成熟，信道估计应用于无信通信系统领域成为可能，越来越多的研究人员开始将深度学习与通信系统相结合，以解决更加复杂的问题，提高系统智能化。为了处理大规模 MIMO 系统复杂的空间结构问题，文献[6]提出了一种新的框架，将深度学习与大规模 MIMO 系统相结合以提高系统性能。

上述方法在降低系统计算复杂度与保证系统性能等方面难以达到有效平衡，因此，研究新的信道估

作者简介：王　彬(1982-)，男，硕士，高级工程师，主要研究方向：集成电路应用、失效分析、可靠性设计。

收稿日期：2021-11-16

计算法具有重要意义。

为降低大规模 MIMO 系统的计算复杂度，保证算法与复杂度之间的有效平衡，本文提出了一种基于对称逐步超松弛（Symmetric Successive Over Relaxation，SSOR）的信道估计算法，该方法可有效避免矩阵求逆运算，降低了系统计算复杂度；根据大规模 MIMO 系统中信道矢量渐近正交的相关特性，进一步提高 SSOR 算法的稳定性；最后，对所提算法进行了仿真实验对比分析，结果表明该算法可有效降低系统复杂度，且随着迭代次数的增加，其性能逐渐接近于 MMSE 算法，较好地实现了低复杂度与高性能之间的有效平衡。

1 典型系统模型

典型的大规模 MIMO 上行链路系统，假设其工作于时分双工模式，基站端装配有 N_r 根天线，并同时服务于 N_t 个单天线用户，且基站端天线数远大于用户数。向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^{N_t \times 1}$ 表示用户发送信号，信道矩阵 $\boldsymbol{H} \in \mathbb{C}^{N_r \times N_t}$ 表示平坦瑞利衰落信道，且满足分布 $\boldsymbol{H} \sim CN(0,1)$。在基站端，接收信号 $y \in \mathbb{C}^{N_r \times 1}$ 的表达式为式（1）：

$$y = \boldsymbol{Hx} + n \tag{1}$$

其中，向量 $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^{N_r \times 1}$ 表示复高斯白噪声，满足分布 $n \sim CN(0,\sigma^2 I)$。

2 基于 SSOR 迭代的低复杂度信道估计算法

2.1 基于 MMSE 的信道估计算法

用户向基站发送导频信号，基站端的接收信号 $\boldsymbol{Y}$ 表示为式（2）：

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{HP} + \boldsymbol{N} \tag{2}$$

其中，$\boldsymbol{P} \in \mathbb{C}^{N_t \times B}$ 为导频矩阵；B 表示导频序列的长度；矩阵 $\boldsymbol{N} \in \mathbb{C}^{N_t \times B}$ 表示噪声矩阵，其服从分布 $vec(\boldsymbol{N}) \sim CN(ves(\tilde{\boldsymbol{N}}),\boldsymbol{S})$，此处，$\tilde{\boldsymbol{N}} \in \mathbb{C}^{N_t \times B}$ 表示均值；$\boldsymbol{S} \in \mathbb{C}^{N_r B \times N_r B}$ 表示噪声协方差矩阵。

对式（2）向量化可得式（3）：

$$\tilde{\boldsymbol{y}} = \tilde{p}h + n \tag{3}$$

其中，有 $\tilde{\boldsymbol{y}} = vec(Y)$；$\tilde{\boldsymbol{P}} \triangleq (\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} \otimes I)$；$\boldsymbol{h} = vec(\boldsymbol{H})$；$n = vec(\boldsymbol{N})$。

若假设信道和分布统计（如 $\widetilde{\boldsymbol{H}},\boldsymbol{R},\boldsymbol{S},\widetilde{\boldsymbol{N}}$）在基站端都理想已知，则由 MMSE 信道估计算法得到的信道估计为式（4）：

$$\hat{h}_{mmse} = R\tilde{P}^H(\tilde{\boldsymbol{P}}R\tilde{\boldsymbol{P}}^H + S)^{-1}\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{R}\tilde{\boldsymbol{P}}^H\boldsymbol{A}^{-1}\tilde{\boldsymbol{y}} \tag{4}$$

其中，矩阵 $\boldsymbol{R} \in \mathbb{C}^{N_rN_t \times N_rN_t}$ 表示为信道的协方差矩阵，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为厄尔米特正定矩阵。

由式（4）可知，基于 MMSE 的信道估计涉及到高维矩阵的求逆运算，其复杂度 $O(M^3)$（其中 $M = \boldsymbol{N}_r \times \boldsymbol{N}_t$），随着大规模 MIMO 系统天线数的增加而迅速增大，不利于硬件系统的实现。

2.2 基于 SSOR 的信道估计算法

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为厄尔米特正定矩阵，直接计算矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的计算复杂度较高，因此，可将 $\boldsymbol{A}^{-1}\tilde{\boldsymbol{y}}$ 的计算转化为求解线性方程组 $\boldsymbol{As} = \tilde{\boldsymbol{y}}$ 的解。本文采用了 SSOR 方法来求解该线性方程组，其主要步骤如下：

（1）将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分解得式（5）：

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{L} - \boldsymbol{L}^H \tag{5}$$

其中，矩阵 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{L}$、$\boldsymbol{L}^H$ 分别表示由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的元素所组成的对角矩阵、严格下三角矩阵和严格上三角矩阵。

（2）一次 SSOR 迭代是由两个半个 SOR 迭代组成，而采用 SOR 迭代计算第一个半迭代[7]，可得式（6）：

$$(\boldsymbol{D} + \omega\boldsymbol{L})\boldsymbol{s}^{(t+1/2)} = (1-\omega)\boldsymbol{Ds}^{(t)} + \omega\tilde{\boldsymbol{y}} \tag{6}$$

（3）采用 SOR 迭代计算第二个半迭代为式（7）：

$$(\boldsymbol{D} + \omega\boldsymbol{L}^H)\boldsymbol{s}^{(t+1)} = (1-\omega)\boldsymbol{Ds}^{(t+1/2)} - \omega\boldsymbol{Ls}^{(t+1/2)} + \omega\tilde{\boldsymbol{y}} \tag{7}$$

在式（6）和式（7）中，ω 表示松弛因子参数，且 $0 < \omega < 2$，松弛因子 ω 影响着 SSOR 算法的收敛性能，其与算法的收敛性相关，t 表示迭代次数。

在基于式（6）～（7）的多次迭代后，得到的向量 $\boldsymbol{s}$，即可近似为 $\boldsymbol{A}^{-1}\tilde{\boldsymbol{y}}$ 的值，因此可以有效避免矩阵的求逆运算。

2.3 松弛因子和复杂度分析

基于 SSOR 的预编码可以在不损失性能的情况下将经典 ZF 预编码的复杂性降低约一个数量级，并且在典型衰落通道中的表现也优于线性近似预编码方案[8]。因此，对于 SSOR 迭代法，其最优松弛因子 ω_{opt} 的取值为式（8）：

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{2(1-\rho(\boldsymbol{B}_J))}} \tag{8}$$

其中，$\rho(B_J)$ 表示雅可比矩阵 $\boldsymbol{B}_J$ 的谱半径，可被表示为：

$$\rho(\boldsymbol{B}_J) = \rho[\boldsymbol{D}^{-1}(-\boldsymbol{L} - \boldsymbol{L}^H)] = \rho[\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{D})] = \rho[\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A} - I] = \rho[\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}] - 1 \tag{9}$$

对于大规模 MIMO 系统而言，基于随机矩阵理

论,矩阵 $\boldsymbol{D}^{-1}$ 可近似为 $(1/N_r I)$,则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的频谱半径可近似为式(10)[9]:

$$\rho[\boldsymbol{A}] = \boldsymbol{N}_r\left(1+\sqrt{\frac{\boldsymbol{N}_t}{\boldsymbol{N}_r}}\right)^2 \tag{10}$$

基于上述讨论,最优松弛因子的近似值可表示为式(11):

$$\tilde{\omega}_{opt} = \frac{2}{1+\sqrt{2(1-a)}} \tag{11}$$

其中,参数 $a = \left(1+\sqrt{\frac{\boldsymbol{N}_t}{\boldsymbol{N}_r}}\right)^2 - 1$,表明近似最优松弛因子 $\tilde{\omega}_{opt}$ 只与天线数 $\boldsymbol{N}_r$、$\boldsymbol{N}_t$ 相关。

尽管近似最优松弛因子 $\tilde{\omega}_{opt}$ 与最优松弛因子 ω_{opt} 之间存在误差,近似最优松弛因子也可以实现良好的性能。分析了基于 SSOR 迭代的信道估计算法的计算复杂度,主要取决于复数乘法次数。

对于基于 SSOR 的信道估计算法,其复杂度主要来源于式(6)~(7)的迭代计算,将式(6)~(7)转化为方程(12)~(13):

$$\boldsymbol{s}_k^{(t+1/2)} = \boldsymbol{s}_k^{(t)} + \frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{A}_{ii}}\left(\tilde{y}_i - \sum_{j=1}^{N_t N_r - 1}\boldsymbol{A}_{k,j}s_j^{(k+1/2)} - \sum_{j=k}^{N_t N_k}\boldsymbol{A}_{k,j}\boldsymbol{s}_j^{(k)}\right) \tag{12}$$

$$\boldsymbol{s}_k^{(t+1)} = \boldsymbol{s}_k^{(t+1/2)} + \frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{A}_{ii}}\left(\tilde{\boldsymbol{y}}_i - \sum_{j=1}^{N_t N_r - 1}\boldsymbol{A}_{k,j}\boldsymbol{s}_j^{(k+1)} - \sum_{j=k}^{N_t N_k}\boldsymbol{A}_{k,j}\boldsymbol{s}_j^{(k+1/2)}\right) \tag{13}$$

其中,下标参数 k 表示向量或矩阵的第 k 个元素。

由式(12)可知,计算此部分所需要的复数乘法次数为 M^2+M 次,综合式(12)~(13)可得其计算复杂度为 $t(1M^2+2M)$。

3 仿真结果比较分析

采用归一化的均方误差来评估本文所提出的 SSOR 算法的性能,且将传统的 MMSE 算法作为基础比较。考虑典型的大规模 MIMO 上行链路系统,假设其基站装配有 $\boldsymbol{N}_r = 100$ 根天线,服务于 $\boldsymbol{N}_t = 10$ 个单天线用户,导频序列的长度为 $\boldsymbol{B} = 10$,p 为导频污染因子。

无导频污染,即 $p = 0$ 的情况下,比较了基于 SOR 迭代、基于 SSOR 迭代以及基于 MMSE 的 3 种信道估计算法在不同迭代次数下的归一化均方误差性能,如图 1 所示。由图 1 可知,随着迭代次数的增加,基于 SSOR 迭代的信道估计算法的性能趋近于基于 MMSE 的信道估计算法,且基于 SSOR 迭代的信道估计算法性能优于基于 SOR 迭代的信道估计算法,收敛速度更快。

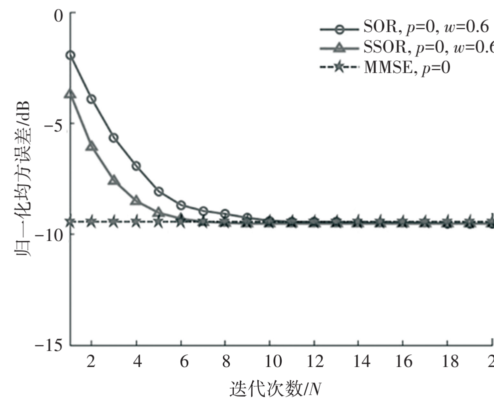

图 1 无导频污染不同迭代次数下的归一化均方误差

Fig. 1 Normalized mean square error under different iteration times without pilot pollution

在导频污染 $p = 0.1$ 的情况下,比较了基于 SOR 迭代、基于 SSOR 迭代以及基于 MMSE 的 3 种信道估计算法在不同迭代次数下的归一化均方误差性能,如图 2 所示。由图 2 可知,存在导频污染的情况下,基于 SOR 迭代的信道估计算法和基于 SSOR 迭代的信道估计算法的归一化均方误差均随着迭代次数的增加而逐渐达到收敛,SSOR 迭代信道估计算法的收敛速度更快,且更接近基于 MMSE 的信道估计算法。

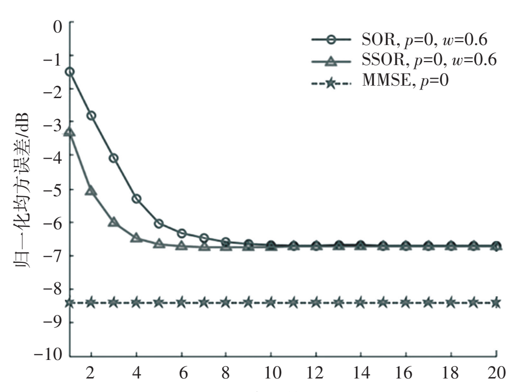

图 2 有导频污染不同迭代次数下的归一化均方误差

Fig. 2 Normalized mean square error under different iteration times with pilot pollution

4 结束语

为避免高维矩阵的直接求逆运算,降低大规模 MIMO 系统信道估计算法的复杂度,本文主要研究了一种基于 SSOR 迭代的低复杂度信道估计算法,并分析了最优松弛因子的选择,得出了最优松弛因子只与天线数量有关的结论。经仿真实验表明,该

(下转封三)